九章算經

九章筭經卷第四

魏　劉徽　注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋

少廣以御積冪方圓

少廣臣淳風等謹按一畝之田廣一步長二百四十步今欲截取其從少以益其廣故曰少廣

術曰置全步及分母子以最下分母徧乘諸分子及全步臣淳風等謹按以分母乘全者通其分也以母乘子者齊其子也各以其母除其子置之於左命通

分者又以分母徧乘諸分子及已通者皆
通而同之并之爲法臣淳風等謹按諸子悉通故可并之爲法
亦宜用合分術列數尤多若用乘則筭數至繁故別制此術從省約置所求步數
以全步積分乘之爲實置所求步數以全步積分乘
之爲實此以田廣爲法一畝積步爲實置有分者當同其
母齊其子以同乘法實而并齊於法今以
分母乘全步及子子如母而一並以并全法則法實
俱長意亦等也故如法而一得從步數實如法而一得從步
今有田廣一步半求田一畝問從幾何

荅曰一百六十步

術曰下有半是二分之一以一爲二半爲一并之得三爲法置田二百四十步亦以一爲二乘之爲實實如法得從步

今有田廣一步半三分步之一求田一畝問從幾何

荅曰一百三十步一十一分步之一十

術曰下有三分以一爲六半爲三三分之

一爲二并之得一十一以爲法置田二百
四十步亦以一爲六乘之爲實實如法得
從步

今有田廣一步半三分步之一四分步之一求
田一畝問從幾何

荅曰一百一十五步五分步之一

術曰下有四分以一爲一十二半爲六三
分之一爲四四分之一爲三并之得二十
五以爲法置田二百四十步亦以一爲一

十二乘之爲實實如法而一得從步
今有田廣一步半三分步之一四分步之一五
分步之一求田一畝問從幾何
荅曰一百五步一百三十七分步之
一十五
術曰下有五分以一爲六十半爲三十三
分之一爲二十四分之一爲一十五五分
之一爲一十二并之得一百三十七以爲
法置田二百四十步亦以一爲六十乘之

爲實實如法得從步

今有田廣一步半三分步之一四分步之一五分步之一六分步之一求田一畝問從幾何

荅曰九十七步四十九分步之四十七

術曰下有六分以一爲一百二十半爲六十三分之一爲四十四分之一爲三十五分之一爲二十四六分之一爲二十并之得二百九十四以爲法置田二百四十步

亦以一爲一百二十乘之爲實實如法得
從步
今有田廣一步半三分步之一四分步之一五
分步之一六分步之一七分步之一求田一畝
問從幾何
荅曰九十二步一百二十一分步之
六十八
術曰下有七分以一爲四百二十半爲二
百一十三分之一爲一百四十四分之一

爲一百五五分之一爲八十四六分之一
爲七十七分之一爲六十并之得一千八
十九以爲法置田二百四十步亦以一爲
四百二十乘之爲實實如法得從步

今有田廣一步半三分步之一四分步之一五
分步之一六分步之一七分步之一八分步之
一求田一畝問從幾何

荅曰八十八步七百六十一分步之
二百三十二

術曰下有八分以一爲八百四十半爲四百二十三分之一爲二百八十四分之一爲二百一十五分之一爲一百六十八六分之一爲一百四十七分之一爲一百二十八分之一爲一百五并之得二千二百八十三以爲法置田二百四十步亦以一爲八百四十乘之爲實實如法得從步

今有田廣一步半三分步之一四分步之一五分步之一六分步之一七分步之一八分步之

一九分步之一求田一畝問從幾何

荅曰八十四步七千一百二十九分步之五千九百六十四

術曰下有九分以一為二千五百二十半為一千二百六十三分之一為八百四十四分之一為六百三十五分之一為五百四六分之一為四百二十七分之一為三百六十八分之一為三百一十五九分之一為二百八十并之得七千一百二十九

以爲法置田二百四十步亦以一爲二千
五百二十乘之爲實實如法得從步
今有田廣一步半三分步之一四分步之一五
分步之一六分步之一七分步之一八分步之
一九分步之一十分步之一求田一畝問從幾
何
荅曰八十一步七千三百八十一分
步之六千九百三十九
術曰下有一十分以一爲二千五百二十

半爲一千二百六十三分之一爲八百四十四分之一爲六百三十五分之一爲五百四六分之一爲四百二十七分之一爲三百六十八分之一爲三百一十五九分之一爲二百八十十分之一爲二百五十二并之得七千三百八十一以爲法置田二百四十步亦以一爲二千五百二十乘之爲實實如法得從步

今有田廣一步半三分步之一四分步之一五

分步之一六分步之一七分步之一八分步之一九分步之一十分步之一十一分步之一求田一畝問從幾何

荅曰七十九步八萬三千七百一十一分步之三萬九千六百三十一

術曰下有一十一分以一爲二萬七千七百二十半爲一萬三千八百六十三分之一爲九千二百四十四分之一爲六千九百三十五分之一爲五千五百四十四六

分之一爲四千六百二十七分之一爲三千九百六十八分之一爲三千四百六十五九分之一爲三千八十一十分之一爲二千七百七十二一十一分之一爲二千五百二十并之得八萬三千七百一十一以爲法置田二百四十步亦以一爲二萬七千七百二十乘之爲實實如法得從步

今有田廣一步半三分步之一四分步之一五分步之一六分步之一七分步之一八分步之

一九分步之一十分步之一十一分步之一十
二分步之一求田一畝問從幾何
荅曰七十七步八萬六千二十一分
步之二萬九千一百八十三
術曰下有一十二分以一爲八萬三千一
百六十半爲四萬一千五百八十三分之
一爲二萬七千七百二十四分之一爲二
萬七百九十五分之一爲一萬六千六百
三十二六分之一爲一萬三千八百六十

七分之一爲一萬一千八百八十八分之一爲一萬三百九十五九分之一爲九千二百四十一十分之一爲八千三百一十六十一分之一爲七千五百六十二分之一爲六千九百三十并之得二十五萬八千六十三以爲法置田二百四十步亦以一爲八萬三千一百六十乘之爲實實如法得從步臣淳風等謹按凡爲術之意約省爲善宜云下有一十二分以一爲二萬七千七百二十半爲一萬三千八百六十三分之一爲九千二百四

十四分之一爲六千九百三十五分之一爲五千五百四十四六分之一爲四千六百二十七分之一爲三千九百六十八分之一爲三千四百六十五九分之一爲三千八十十分之一爲二千七百七十二十一分之一爲二千五百二十十二分之一爲二千三百一十并之得八萬六千二十一以爲法置田二百四十步亦以一爲二萬七千七百二十乘之以爲實實如法得從步其術亦得知不繁也

今有積五萬五千二百二十五步問爲方幾何

荅曰二百三十五步

又有積二萬五千二百八十一步問爲方幾何

荅曰一百五十九步

又有積七萬一千八百二十四步問爲方幾何

荅曰二百六十八步

又有積五十六萬四千七百五十二步四分步之一問爲方幾何

荅曰七百五十一步半

又有積三十九億七千二百一十五萬六百二十五步問爲方幾何

荅曰六萬三千二十五步

開方求方冪之一面也

術曰置積爲實借一筭步之超一等言百之面十也言萬之面百也議所得以一乘所借一筭爲法而以除先得黃甲之面上下相命是自乘而除也除已倍法爲定法倍之者豫張兩面朱冪定袤以待復除故曰定法其復除折法而下欲除朱冪者本當副置所得成方倍之爲定法以折議乘而以除如是當復步之而止乃得相命故使就上折下復置借筭步之如初以復議一乘之欲除朱冪之角黃乙之冪其意如初之所得也所得副以加定法以除以所得副從定法再以黃乙之面加定法者是則張兩青冪之袤復除折下如前若

開之不盡者爲不可開當以面命之術或有以借筭加定法而命分者雖粗相近不可用也凡開積爲方方之自乘當還復其積分令不加借筭而命分則常微少其加借筭而命分則又微多其數不可得而定故惟以面命之爲不失耳譬猶以三除十以其餘爲三分之一而復其數可舉不以面命之加定法如前求其微數微數無名者以爲分子其一退以十爲母其再退以百爲母退之彌下其分彌細則朱冪雖有所棄之數不足言之也若實有分者通分内子爲定實乃開之訖開其母報除臣淳風等謹按分母可開者並通之積先合二母既開之後一母尚存故開分母求一母爲法以報除也若母不可開者又以母再乘

定實乃開之訖令如母而一臣淳風等謹按分母不可開者本一母也又以母乘之乃合二母既開之後亦一母存焉故令一母而一得全面也又按此術開方者求方冪之面也借一筭者假借一筭空有列位之名而無除積之實方隅得面是故借筭列之於下步之超一等者方十自乘其積有百方百自乘其積有萬故超一位至百而言十至萬而言百議所得以一乘所借筭為法而以除者先得黃甲之面以方為積者兩相乘故開方除之還令兩面上下相命是自乘而除之除已倍法為定法者實積未盡當復更除之故豫張兩面朱冪表以待復除故曰定法其復除折法而下者欲除朱冪本當副置所得成方倍之為定法以折議乘之而以除如初是當復步之而止乃得相命故使就上折之而下復置借筭步之如初

以復議一乘之所得副以加定法以定法除者欲除朱冪之角黃乙之冪以所得副從定法者再以黃乙之冪加定法是則張兩青冪之袤故如前開之即合所開

今有積一千五百一十八步四分步之三問為圓周幾何

答曰一百三十五步於徽術當周一百三十八步一十分步之一臣淳風等謹按此依密率為周一百三十八步五十分步之九

又有積三百步問為圓周幾何

答曰六十步於徽術當周六十一步五十分步之十九臣

淳風等謹依密率為周六十一步一百分步之四十一

開圓

術曰置積步數以十二乘之以開方除之即得周此術以周三徑一為率與舊圓田術相返覆也於徽術以三百一十四乘積如二十五而一所得開方除之即周也開方除之即徑是為據見冪以求周猶失之於徽少其以二百乘積一百五十七而一開方除之即徑猶失之於徽多臣淳風等謹按此注於徽術求周之法其中不用開方除之即徑六字今本有者衍賸也依密率八十八乘之七而一按周三徑一之率假令周六徑二半周半徑相乘得冪三周自乘得三十六俱以等數除冪得一周之數十二也其積本周自乘合

以一乘之十二而一得積三也術爲一乘不長故以十二而一得此積今還元置此積三以十二乘之者復其本周自乘之數凡物自乘開方除之復其本數故開方除之即周

今有積一百八十六萬八百六十七尺此尺謂立方之尺也凡物有高深而言積者曰立方問爲立方幾何

荅曰一百二十三尺

又有積一千九百五十三尺八分尺之一問爲立方幾何

荅曰一十二尺半

又有積六萬三千四百一尺五百一十二分尺之四百四十七問爲立方幾何

荅曰三十九尺八分尺之七

又有積一百九十三萬七千五百四十一尺二十七分尺之一十七問爲立方幾何

荅曰一百二十四尺太半尺

開立方（立方適等求其一面也）

術曰置積爲實借一筭步之超二等（言千之面十言百萬之面百）議所得以再乘所借一筭爲法

而除之再乘者亦求為方冪以上議命而除之則立方等也除已三之為定法為當復除故豫張三面以定方冪為定法也復除折而下復除者三面方冪以皆自乘之數須得折議定其厚薄爾開平冪者方百之面十開立冪者方千之面十據定法已有成方之冪故復除當以千為百折下一等也以三乘所得數置中行設三廉之定長復借一筭置下行欲以為隅方立方等未有定數且置一筭定其位步之中超一下超二位上方法長自乘而一折中廉法但有長故降一等下隅法無面長故又降一等也復置議以一乘中為三廉備冪也再乘下令隅自乘為方冪也皆副以加定法以定

除三面三廉一隅皆已有冪以上議命之而除去三衺之厚也除巳倍下并中從定法凡再以中三以下加定法者三廉各當以兩面之冪連於三廉之端以待復除也言不盡意解此要當以棊棊乃得明耳復除折下如前開之不盡者亦爲不可開術亦有以定法命分者不如故冪開方以微數爲分也若積有分者通分內子爲定實定實乃開之訖開其母以報除臣淳風等按分母可開者並通之積先合三母既開之後一母尚存故開分母求一母爲法以報除也若母不可開者又以母再乘定實乃開之訖令如母而一臣淳風等謹按分母不可開者

本一毋也又以毋再乘之令合三毋既開之後一毋猶存故令一毋而一得全面也
按開立方知立方適等求其一面之數借一筭步之超二位者但立方求積方再自
乘就積開之故超二位言千之面十言百萬之面百議所以再乘所借筭為法而以
除知求為方羃以議命之而除則立方等也除已三之為定法為積未盡當復更除
故豫張三面已定方羃為定法復折除而下知三面方羃皆已有自乘之數須得折
議定其厚薄據開平方百之面十其開立方即千之面十而定法已有成方之羃故
復除之者當以千為百折下一等以三乘所得數置中行者設三廉之定長復借一
筭置下行者欲以為隅方立方等未有數且置一筭定其位也步之中超一下超二
者上方法長自乘而一折中廉法但有長故降一等下隅法無面長故又降一等復

置議以一乘中者爲三廉借冪再乘下當令隅自乘爲方冪皆副以加定法以定法除之而除者三面三廉一隅皆已有冪以上議命除去三冡之厚除巳倍下併中從定法者三廉各當以兩面之冪連於兩方之面一隅連於三廉之端以待復除其開之不盡者折下如前開方即合所問有分者通分內子開之訖開其母以報除可開者以通之積先合三母既開之後一母尚存故開分母者求一三母爲法以報除若母不可開者又以母再乘定實乃開之訖令如母而一分母不可開者本一母又以母再乘令合三母既開之後亦一母尚存故令如母而一得全面也

今有積四千五百尺亦謂立方之尺也問爲立圓徑幾何

荅曰二十尺依密率立圓徑二十尺計積四千一百九十尺二十一分尺之一十

又有積一萬六千四百四十八億六千六百四十三萬七千五百尺問爲立圓徑幾何

荅曰一萬四千三百尺依密率爲徑一萬四千六百四十三尺四分尺之三

開立圓

術曰置積尺數以十六乘之九而一所得

開立方除之即丸徑立圓即丸也爲術者蓋依周三徑一之率

令圓羃居方羃四分之三圓囷居立方亦四分之三更令圓囷爲方率十二爲九率九九居圓囷又四分之三也置四分自乘得十六三分自乘得九故九居立方十六分之九也故以十六乘積九而一得立方之積九徑與立方等故開立方而除得徑也然此意非也何以驗之取立方棊八枚皆令立方一寸積之爲立方二寸規之爲圓囷徑二寸高二寸又復横因之則其形有似牟合方蓋矣八棊皆似陽馬圓然也按合蓋者方率也九居其中即圓率也推此言之蓋謂夫圓囷爲方率豈不闕哉以周三徑一爲圓率則圓羃傷少令圓囷爲方率則九積傷多互相通補是以九與十六之率偶與實相近而丸猶傷多耳觀立方之内合蓋之外雖衺殺有漸而多少不掩判合總結方圓相纏濃纖詭互不可等正欲陋形措意懼失正理敢不闕疑以俟能

言者　黃金方寸重十六兩金丸徑寸重九兩率生於此未曾驗也周官考工記桌氏爲量改煎金錫則不耗不耗然後權之權之然後準之準之然後量之言鍊金使極精而後分之則可以爲率也今九徑自乘三而一開方除之即九中率之立方也假令九中立方五尺五尺爲句句自乘冪二十五尺倍之得五十尺以爲股股冪謂平面方五尺之弦也以此弦冪爲股亦以五尺爲句并句股冪得七十五尺是爲大弦冪開方除之則大弦可知也大弦則中立方之長邪邪即丸徑也故中立方自乘之冪於九徑自乘之冪三分之一也今大弦還乘其冪即九外立方之積也大弦冪開之不盡令囷冪七十五再自乘之爲面命得外立方積四十二萬一千八百七十五尺之面又令中立方五尺自乘又以方乘之得積一百二十五尺一百二十五尺自乘

爲面句得積一萬五千六百二十五尺之面皆以六百二十五約之外立方積六百七十五尺之面中立方積二十五尺之面也　十張衡筭又謂立方爲質立圓爲渾衡言質之與中外之渾六百七十五尺之面開方除之不足一謂外質積二十六也內渾二十五之面謂積五尺也今撒令質中渾渾又言質則二質相與之率猶衡二言渾相與之率也衡蓋亦先二質之率推以言渾之率也衡又言質六十四之面渾二十五之面質復言渾謂居質八分之五也又云方八之面圓渾相推知其復以圓囷爲方率渾爲圓率也失之遠矣衡說之自然欲協其陰陽奇耦之說而不顧疎密矣雖有文辭斯亂道破義病也置外質積二十六以九乘之十六而一得積十四尺八分之五即質中之渾也以分母乘全內子得一百一十七又置內質積五以分母

乘之得四十是爲質居渾一百一十七分之四四十而渾率猶爲傷多也假令方二尺方四面并得八尺也謂之方周其中令圓徑與方等亦得二尺也凡半徑以乘圓周之半即圓冪也半方以乘方周之半即方冪也然則方周知方冪之率也圓周知圓冪之率也按如衡術方周率八之面圓周率五之面也令方周六十四尺之面即圓周四十尺之面也又令徑二尺自乘得徑四尺之面是爲圓周率十二之面而徑率一之面也衡亦以周三徑一之率爲非是故更著此法然增周太多過其實矣 臣淳風等謹按祖暅之謂劉徽張衡二人皆以圓囷爲方率丸爲圓率乃設新法祖暅之開立圓術曰以二乘積開立方除之即立圓徑其意何也取立方棊一枚令立樞於左後之下隅從規去其右上之廉又合而橫規之去其前上之廉於是立方之棊分

而爲四規內棊一謂之內棊規外棊三謂之外棊規更合四棊復橫斷之以句股言之令餘高爲句內棊斷上方爲股本方之數其弦也句股之法以句上羃減弦羃則餘爲股羃若令餘高自乘減本方之羃餘即內減棊斷上方之羃也本方之羃即外四棊之斷上羃然則餘高自乘即外三棊之斷上羃矣不問高卑勢皆然也然固有所歸同而塗殊者爾而乃控遠以演類借況以析微按陽馬方高高數參等者列而立之橫截去上則高自乘與斷上羃數亦等焉夫疊棊成立積緣羃勢既同則積不容異由此觀之規之外三棊旁蹙爲一即一陽馬也三分立方則陽馬居一內棊居二可知矣合八小方成一大方合八內棊成一合蓋內棊居小方三分之二則合蓋居立方亦三分之二較然驗矣置三分之二以圓羃率三乘之如方羃率四而一約而定

之以爲九率故曰九居立方三分之一也等數既密心亦昭晰張衡放舊貽哂於後劉徽循故未暇校新夫豈難哉抑未之思也依密率立此圓積本以圓徑再自乘十一乘之二十一而一約此積今欲求其本積故以二十一乘之十一而一凡物再自乘開立方除之復其本數故立方除之即丸徑也

九章筭經卷第四

九章筭經卷第五

魏　劉徽　注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉　勑注釋

商功以御功程積實

今有穿地積一萬尺問爲堅壤各幾何

荅曰

爲堅七千五百尺

爲壤一萬二千五百尺

術曰穿地四爲壤五壤謂息土爲堅三堅謂築土爲

墟四墟謂穿坑此皆其常率以穿地求壤五之求堅三之皆四而一今有術也以壤求穿四之求堅三之皆五而一以堅求穿四之求壤五之皆三而一臣淳風等謹按此術並今有之義也重張穿地積一萬尺爲所有數堅率三壤率五各爲所求率墟率四爲所有率而今有之即得

城垣隄溝壍渠皆同術

術曰并上下廣而半之損廣補狹以高若深乘之又以袤乘之即積尺按此術并上下廣而半之若以盈補虛得中平之廣以高若深乘之堅率三壤率五各爲所求率墟四爲所有率而今有

之得一頭之立冪又以袤乘之者得立實之積故爲積尺

今有城下廣四丈上廣二丈高五丈袤一百二十六丈五尺問積幾何

荅曰一百八十九萬七千五百尺

今有垣下廣三尺上廣二尺高一丈二尺袤二十二丈五尺八寸問積幾何

荅曰六千七百七十四尺

今有隄下廣二丈上廣八尺高四尺袤一十二丈七尺問積幾何

荅曰七千一百一十二尺

冬程人功四百四十四尺問用徒幾何

荅曰一十六人一百一十一分人之二

術曰以積尺爲實程功尺數爲法實如法而一即用徒人數

今有溝上廣一丈五尺下廣一丈深五尺袤七丈問積幾何

荅曰四千三百七十五尺

春程人功七百六十六尺并出土功五分之四定功六百一十二尺五分尺之四問用徒幾何

荅曰七人三千六十四分人之四百二十七

術曰置本人功去其五分之一餘爲法去其五分之一者謂以四乘五除也以濤積尺爲實實如法而一得用徒人數按此術本置人功去其五分之一者謂以四乘之五而一除去出土之功取其定功乃通分內子以爲法以分母乘濤積尺爲實者法裏

有分實裏通之故實如法而一即用徒人數此以一人之積尺除其衆尺故用徒人數不盡若筭數約之而命分也

今有塹上廣一丈六尺三寸下廣一丈深六尺三寸袤一十三丈二尺一寸問積幾何

荅曰一萬九百四十三尺八寸八寸者謂穿地方尺深八寸此積餘有方寸中二分四氂五毫乘之貴欲從易非其常定也

夏程人功八百七十一尺并出土功五分之一沙礫水石之功作太半定功二百三十二

尺一十五分尺之四問用徒幾何

荅曰四十七人三千四百八十四分人之四百九

術曰置本人功去其出土功五分之一又去沙礫水石之功太半餘爲法以壍積尺爲實實如法而一即用徒人數 按此術置本人功去其出土功五分之一者謂以四乘五除又去沙礫水石作太半者一乘三除存其少半取其定功乃通分內子以爲法以分母乘積尺爲實者爲法褁有分實褁通之故實如法而一即用徒人數不盡者等數約之而命分也

今有穿渠上廣一丈八尺下廣三尺六寸深一丈八尺袤五萬一千八百二十四尺問積幾何

答曰一千七萬四千五百八十五尺六寸

秋程人功三百尺問用徒幾何

答曰三萬三千五百八十二人功内少一十四尺四寸

一千人先到問當受袤幾何

答曰一百五十四丈三尺二寸八十

一分寸之八

術曰以一人功尺數乘先到人數爲實以一千人一日功爲實立實爲功并渠上下廣而半之以深乘之爲法以渠廣深之立實爲法實如法得袤尺

今有方垜壔垜者垜城也壔音丁老切又音纛謂以土擁木也方一丈六尺高一丈五尺問積幾何

荅曰三千八百四十尺

術曰方自乘以高乘之即積尺

今有圓垜壔周四丈八尺高一丈一尺問積幾

何

荅曰二千一百一十二尺於徽術當積二千一十七尺一百五十七分尺之一百三十一　臣淳風等謹按依密率積二千一十六尺

術曰周自相乘以高乘之十二而一此章諸術亦以周三徑一爲率皆非也於徽術當以周自乘以高乘之又以二十五乘之三百一十四而一此之圓冪亦如圓田之冪也求冪亦如圓田而以高乘冪也　臣淳風等謹按依密率以七乘之八十八而一

今有方亭下方五丈上方四丈高五尺問積幾

何

荅曰一十萬一千六百六十六尺太半尺

術曰上下方相乘又各自乘并之以高乘之三而一

此章有壍堵陽馬皆合而成立方蓋說筭者乃立棊三品以效高深之積假令方亭上方一尺下方三尺高一尺其用棊也中央立方一四面壍堵四角陽馬四上下方相乘為三尺以高乘之約積三尺是為得中央立方一四面壍堵各一上方自乘亦得中央立方一下方自乘為九以高乘之得積九尺是為中央立方一四面壍堵各二四角陽馬各三也上方自乘以高乘之得積一尺又為中

央立方一凡三品棊皆一而爲三故三而一得積尺用棊之數立方三壍堵陽馬各十二凡二十七棊十三更差次之而成方亭者三驗矣爲術又可令方差自乘以高乘之三而一即四陽馬也上下方相乘以高乘之即中央立方及四面壍堵也并之以爲方亭積數也

今有圓亭下周三丈上周二丈高一丈問積幾何

荅曰五百二十七尺九分尺之七於徽術當積五百四尺四百七十一分尺之一百一十六也按密率爲積五百三十三尺三十三分尺之二十六

術曰上下周相乘又各自乘并之以高乘之三十六而一此術周三徑一之義合以三除上下周各爲上下徑以相乘又各自乘并以高乘之三而一爲方亭之積假令三約上下周俱不盡還通之即各爲上下徑令上下徑分母相乘又各自乘并以高乘之爲三方亭之積分此合分母三相乘得九爲法除之又三而一得方亭之積亦猶方冪中求圓冪乃令圓率三乘之方率四而一得圓亭之積前求方亭之積乃以三而一求圓亭之積亦各三乘之二母既同故相準折推以方冪四乘分母九得三十六而連除之於徵術當上下周相乘又各自乘并以高乘之又二十五乘之九百四十二而一此方亭四角圓殺比於方亭二百分之一百五十七爲術之意先作方亭三而一則此據上下徑

爲之者當又以一百五十七乘之六百而一也今據周爲之若於圓垛壔又以二十五乘之三百一十四而一則先得三圓亭矣故以三百一十四爲九百四十二而一并除之臣淳風等謹按依密率以七乘之二百六十四而一

今有方錐下方二丈七尺高二丈九尺問積幾何

荅曰七千四十七尺

術曰下方自乘以高乘之三而一按此術假令方錐下方二尺高一尺即四陽馬如術爲之用十二陽馬成三方錐故三而一得陽馬也

今有圓錐下周三丈五尺高五丈一尺問積幾何

荅曰一千七百三十五尺一十二分尺之五於徽術當積一千六百五十八尺三百一十四分尺之十三依密率爲積一千六百五十六尺八十八分尺之四十七

術曰下周自乘以高乘之三十六而一按此術圓錐下周以爲方錐下方今自乘以高乘之合三而一得大錐方之積大錐方之積合十二圓矣令求一圓復合十二除之故令三乘十二得三十六而連除於徽術當下周自乘以高乘之又以二十五乘之九百四十二而一圓錐比於方

錐亦二百分之一百五十七命徑自乘者亦當以一百五十七乘之六百而一其說如圓亭也　臣淳風等謹按依密率以七乘之二百六十四而一

今有壍堵下廣二丈袤一十八丈六尺高二丈五尺問積幾何

荅曰四萬六千五百尺

術曰廣袤相乘以高乘之二而一邪解立方得兩壍堵雖復隨方亦爲壍堵故二而一此則合所規棊推其物體蓋爲壍上疊也其形如城而無上廣與所規棊形異而同實未聞所以名之爲壍堵之說也

今有陽馬廣五尺袤七尺高八尺問積幾何

荅曰九十三尺少半尺

術曰廣袤相乘以高乘之三而一按此術陽馬之形方錐一隅也今謂四柱屋隅爲陽馬假令廣袤各一尺高一尺相乘之得立方積一尺邪解立方得兩壍堵邪解壍堵其一爲陽馬一爲鼈腝陽馬居二鼈腝居一不易之率也合兩鼈腝成一陽馬合三陽馬而成一立方故三而一驗之以棊其形露矣悉割陽馬凡爲六鼈腝觀其割分則體勢互通蓋易了也其棊或脩短或廣狹立方不等者亦割分以爲六鼈腝其形不悉相似然見數同積實均也鼈腝殊形陽馬異體然陽馬異體則不可純合純合則難爲之矣何則按邪解方棊以爲壍堵者必當以半爲分邪解壍堵以爲陽馬者亦必當以半爲分一從一橫耳設爲陽馬爲分

內鼈腝爲分外綦雖或隨脩短廣狹循有此分常率知殊形異體亦同也者以此而已其使鼈腝廣袤各高二尺用塹堵鼈腝之綦各二皆用赤綦又使陽馬之廣袤高各二尺用立方之綦一塹堵陽馬之綦各二皆用黑綦綦之赤黑接爲塹堵廣袤高各二尺於是中效其廣又中分其高令赤黑塹堵各自適當一方高二尺方二尺每二分鼈腝則一陽馬也其餘兩端各積本體合成一方焉是爲別種而方者率居三通其體而方者率居一雖方隨綦改而固有常然之勢也按餘數具而可知者有一二分之別即一二之爲率定矣其於理也豈虛矣若爲數而窮之置餘廣袤高之數各半之則四分之三又可知也半之彌少其餘彌細至細曰微微則無形由是言之安取餘哉數而求窮之者謂以精推不用籌筭鼈腝之物不同器用陽馬之形或隨

修短廣狹然不有鼈腝無以審陽馬之數不有陽馬無以知錐亭之類功實之主也

今有鼈腝下廣五尺無袤上袤四尺無廣高七尺問積幾何

答曰二十三尺少半尺

術曰廣袤相乘以高乘之六而一按此術腝者臂骨也或曰半陽馬其形有似鼈肘故以名云中破陽馬得兩鼈腝之見數即陽馬之半數數同而實據半故云六而一即得

今有羨除下廣六尺上廣一丈深三尺末廣八尺無深袤七尺問積幾何

荅曰八十四尺

術曰并三廣以深乘之又以袤乘之六而一

按此術羨除實遂道也其所穿地上平下邪似兩鼈臑夾一塹堵即羨除之形假令用此棊上廣三尺深一尺下廣一尺末廣一尺無深袤一尺下廣皆塹堵之廣者兩鼈臑與一塹堵相連之廣也以深袤乘得積五尺鼈臑居二塹堵居三其於本棊皆一為六故六而一合四陽馬以為方錐邪畫方錐之底亦令為中方就中方削而上合全為中方錐之半於是陽馬之棊悉中解矣中錐離而為四鼈臑焉故外錐之半亦為四鼈臑雖背正異形與常所謂鼈臑參不相似實則同也所云夾塹堵者中錐之鼈臑也凡塹堵上袤短者陽馬也下袤短者與鼈臑連也下兩袤相等知亦

與鼈腝連也并三廣以高袤乘六而一皆其積也今此羨除之廣即塹堵之袤也按此本是三廣不等即與鼈腝連者别而言之中央塹堵廣六尺高三尺袤七尺末廣之兩旁各一小鼈腝皆與塹堵等令小鼈腝居裏大鼈腝居表則大鼈腝出隨皆方錐下廣三尺袤六尺高七尺分取其半則爲袤三尺以高廣乘之三而一即半錐之積也邪解半錐得此兩大鼈腝求其積亦當六而一合於常率矣按陽馬之棊兩邪棊底方當其方也不問旁角而割之相半可知也推此上連無成不方故方錐與陽馬同實角而割之者相半之勢此大小鼈腝可知更相表裏但體有背正也

今有芻甍下廣三丈袤四丈上袤二丈無廣高一丈問積幾何

答曰五千尺

術曰倍下袤上袤從之以廣乘之又以高乘之六而一

推明義理者舊說云凡積芻有上下廣曰童甍謂其屋蓋之苫也是故甍之下廣袤與童之上廣袤等正斬方亭兩邊合之即芻甍之形也假令下廣二尺袤三尺上袤一尺無廣高一尺其用棊也中央塹堵二兩端陽馬各二倍下袤上袤從之為七尺以高廣乘之得冪十四尺陽馬之冪各居一塹堵之冪各居三以高乘之得積十四尺其於本棊也皆一而為六故六而一即得亦可令上下袤差乘廣以高乘之三而一即四陽馬也下廣乘之上袤而半之高乘之即二塹堵并之以為甍積也

芻童皿池盤池冥谷皆同術

術曰倍上袤下袤從之亦倍下袤上袤從之各以其廣乘之并以高若深乘之皆六而一

按此術假令芻童上廣一尺袤二尺下廣三尺袤四尺高一尺其用棊也中央立方二四面壍堵六四角陽馬四倍下袤爲八上袤從之爲十以廣乘之得積三十尺是爲得中央立方各三兩端壍堵各四兩旁壍堵各六四角陽馬亦各六後倍下袤從之爲八以高廣乘之得積八尺是爲得中央立方亦各三兩端壍堵各二并兩旁三品棊皆一而爲六故六而一即得爲術又可令上下廣袤差相乘以高乘之三而一亦四陽馬上下廣袤互相乘并而半之以高乘之即四面六壍堵與二立

方并之爲芻童積又可令上下廣袤互相乘而半之上下廣袤又各自乘并以高乘之三而一即得也

其曲池者并上中外周而半之以爲上袤亦并下中外周而半之以爲下袤

此池環而不通匝形如盤蛇而曲之亦云周者謂如委穀依垣之周耳引而伸之周爲袤求袤之意環田也

今有芻童下廣二丈袤三丈上廣三丈袤四丈高三丈問積幾何

荅曰二萬六千五百尺

今有曲池上中周二丈外周四丈廣一丈下中

周一丈四尺外周二丈四尺廣五尺深一丈問
積幾何
荅曰一千八百八十三尺三寸少半
寸
今有盤池上廣六丈袤八丈下廣四丈袤六丈
深二丈問積幾何
荅曰七萬六百六十六尺大半尺
負土往來七十步其二十步上下棚除棚除
二當平道五踟躕之間十加一載輸之間三

十步定一返一百四十步土籠積一尺六寸秋程人功行五十九里半問人到積及用徒各幾何

荅曰

人到二百四尺

用徒三百四十六人一百五十三分人之六十二

術曰以一籠積尺乘程行步數爲實往來上下棚除二當平道五棚閣除邪道有上下之難故使二當

五也置定往來步數十加一及載輸之間三十步以爲法除之所得即一人所到尺按此術棚閣除邪道有上下之難故使二當五置定往來步數十加一及載輸之間三十步是爲往求一返凡用一百四十步於今有術爲所有行率籠積一尺六寸爲所求到土率程行五十九里半爲所有數而今有之即人到尺數以所到積尺即用徒人數者此一人之積除其衆積尺故得用徒人數爲術又可令往來一返所用之步約程行爲返數乘籠積爲一人所到以此術與今有術相返覆則乘除之或先後意各有所在而同歸耳以所到約積尺即用徒人數

今有冥谷上廣二丈袤七丈下廣八尺袤四丈

深六丈五尺問積幾何

答曰五萬二千尺

載土往來二百步載輸之間一里程行五十

八里六人共車車載三十四尺七寸問人到

積尺及用徒各幾何

答曰

人到二百一尺五十分尺之十三

用徒二百五十八人一萬六十三分

人之三千七百四十六

術曰以一車積尺乘程行步數爲實置今往來步數加載輸之間一里以車六人乘之爲法除之所得即一人所到尺按此術今有之義以載輸及往來并得五百步爲所有行率車載三十四尺七寸爲所求到土率程行五十八里通之爲步爲所有數而今有之所得則一車所到欲得人所到者當以六人除之即得術有分故亦更令乘法而并除者亦用以半尺數以爲一人到土率六人乘五百步爲行率也又亦可五百步爲行率令六人約半積尺數爲一人到土率以載土術入之入之者亦可求返數也要取其會通而已術恐有分故令乘法而并除以所到積尺約即用徒人數者以一以人所積尺除其衆積故得用徒人數也

所到約積尺即用徒人數

今有委粟平地下周一十二丈高二丈問積及爲粟幾何

荅曰

積八千尺於徽術當積七千六百四十三尺一百五十七分尺之四十九　臣淳風等謹依密率爲積七千六百三十六尺十一分尺之四

爲粟二千九百六十二斛二十七分斛之二十六於徽術當粟二千八百三十斛一千四百

一十三分斛之一千二百一十臣淳風等謹依密率爲粟二千八百二十八斛九十九分斛之二十八

今有委菽依垣下周三丈高七尺問積及爲菽各幾何

荅曰

積三百五十尺依徽術當積三百三十四尺四百七十一分尺之一百八十六也臣淳風等謹依密率爲積三百三十四尺十一分尺之一

爲菽一百四十四斛二百四十三分

斛之八依徽術當䔧一百三十七斛一萬二千七百一十七分斛之七千七百七十一臣淳風等謹依密率爲䔧一百三十七斛八百九十一分斛之四百三十三

今有委米依垣內角下周八尺高五尺問積及爲米各幾何

荅曰

積三十五尺九分尺之五於徽術當積三十二尺四百七十一分尺之四百五十七臣淳風等謹依密率當積三十三尺三十三分尺之三十一

爲米二十一斛七百二十九分斛之六百九十一於徽術當米二十斛三萬八千一百五十一分斛之三萬六千九百八十臣淳風等謹依密率爲米二十斛二千六百七十三分斛之二千五百四十

委粟

術曰下周自乘以高乘之三十六而一此猶圜錐也於徽術亦當下周自乘以高乘之又以二十五乘之九百四十二而一也其依垣者居圜錐之半也十八而一於徽術當令此下周自乘以高乘之又以二十五乘之四百七十一而一依垣之周半於全周其自乘之冪居

全周自乘之冪四分之一故半全周之法以為法也

其依垣內角者

角隅也居圓錐四分之一也

九而一

於徽術當令此下周自乘而倍之以高乘之又以二十五乘之四百七十一而一依隅之周半於依垣其自乘之冪居依垣自乘之冪四分之一當半依垣之法以為法法不可半故倍其實又此術亦用周三徑一之率假令以三除周得徑若不盡通分內子即為徑之積分令自乘以高乘之為三方錐之積分母自相乘得九為法又當三而一約方錐之積從方錐中求圓錐之積亦猶方冪求圓冪乃當三乘之四而一方錐得圓冪之積前求方積乃合三而一今求圓錐之積復合三乘之二母既同故相準折惟以四乘分母九得三十六而連除圓錐之積其圓錐之積與平地聚粟同故三十六而一

臣淳風等謹依密

率以七乘之其平地者二百六十四而一依垣者一百三十二而一依隅者六十六而一也

程粟一斛積二尺七寸二尺七寸者謂方一尺深二尺七寸凡積二千七百寸其米一斛積一尺六寸五分寸之一謂積一千六百二十寸其菽荅麻麥一斛皆二尺四寸十分寸之三謂積二千四百三十寸此爲以精麤爲率而不等其槩也粟率五米率三故米一斛於粟一斛五分之三菽荅麻麥亦如本率云故謂此三量器爲槩而皆不合於今斛當今大司農斛圓徑一尺三寸五分五釐正深一尺於徽術爲積一千四百四十一寸排成餘分又有十分寸之三王莽銅斛

於今尺爲深九寸五分五釐徑一尺三寸六分八釐二毫以徽術計之於今斛爲容九斗七升四合有奇周官考工記㮚氏爲量深一尺內方一尺而圓外其實一鬴於徽術此圓積一千五百七十六寸左氏傳曰齊舊四量豆區釜鍾四升曰豆各登其四以登於釜釜十爲鍾鍾六斛四斗釜六斗四升方一尺深一尺其積一千寸若此方積容六斗四升則通外圓積成旁容十斗四合一龠五分之三也以數相乘之則斛之制方一尺而圓其外庣旁一釐七毫冪一百五十六寸四分寸之一深一尺積一千五百六十二寸半容十斗王莽銅斛與漢書律曆志所論斛同

今有穿地袤一丈六尺深一丈上廣六尺爲垣積五百七十六尺問穿地下廣幾何

荅曰三尺五分尺之三

術曰置垣積尺四之爲實實穿地四爲堅三垣堅也以堅求穿地當四之三而一也以深袤相乘爲深袤之立實也又以三之爲法以深袤乘之立實除垣積則阬廣又三之者與堅率并除之所得倍之阬有兩廣先并而半之即爲廣狹之中平令先得其中平故又倍之知兩廣全也減上廣餘即下廣按此術穿地四爲堅三垣即堅也今以堅求穿地當四乘之三而一深袤相乘者爲深袤立冪以深袤立冪除積即阬廣又三之爲法與堅率并除所得倍之者爲阬有兩廣先并而半之爲中平之廣今此得中平之廣故倍之還爲兩廣并故減上廣餘即下廣也

今有倉廣三丈袤四丈五尺容粟一萬斛問高幾何

荅曰二丈

術曰置粟一萬斛積尺爲實廣袤相乘爲法實如法而一得高尺以廣袤之羃除積故得高按此術本以廣袤相乘以高乘之得此積今還元置此廣袤相乘爲法除之故得高也

今有圓囷圓囷廩也亦云圓囤也高一丈三尺三寸少半寸容米二千斛問周幾何

荅曰五丈四尺於徽術當周五丈五尺二寸二十分寸之

九臣淳風等謹按密率爲周一五丈五尺一百分尺之二十七

術曰置米積尺此積猶圓垛壔之積以十二乘之令高而一所得開方除之即周於徽術當置米積尺以三

百一十四乘之爲實二十五乘囷高爲法所得開方除之即周也此亦據見羃以求周失之於微少也晉武庫中有漢時王莽所作銅斛其篆書字題斛旁云律嘉量斛方一尺而圓其外庣旁九氂五毫羃一百六十二寸深一尺積一千六百二十寸容十斗及斛底云律嘉量斗方尺而圓其庣旁九氂五毫羃一尺六寸二分深一尺積一百六十二寸容一斗合龠皆有文字升居斛旁合龠在斛耳上後有讚文與今律暦志同亦魏晉所常用今祖踈王莽銅斛文字尺寸分數然不盡得升合勺之文

字按此術本周自相乘以高乘之十二而一得此積今還元置此積以十二乘之令高而一即復本周自乘之數凡物自乘開方除之即復其本周自乘之數故開方除之即得也　臣淳風等謹依密率以八十乘之爲實七乘囷高爲法實如法而一方除之即周也

九章筭經卷第五　終